

Zusammenfassung Systemtheorie I

Analyse von Signalen im Zeitbereich

Elementare Signale: $S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$ mit $\int_{\mathbb{R}} S(t) dt = 1$... Dirac-Pkt.

Ausbleideigenschaft: $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) S(t-t_0) dt = \phi(t_0)$

$S(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \cdot S(t)$

Zerlegung von $x(t)$ in $S(t)$:
 $x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) S(t-\tau) d\tau$
 $T(x)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) T(S(t-\tau)) d\tau$
 $= \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

Systeme

Klassifikation: (i) gedächtnislos: $y(t)$ hängt nur von $x(t)$ ab $\forall t, x(t) \rightarrow y(t) = c \cdot x(t)$ bz. LTI-System

(ii) linear: $y_i(t) = T(x_i(t)) \rightarrow T(\sum c_i x_i(t)) = \sum c_i y_i(t)$
 (natw. Eigenschaften: homogen: $c_i = 0 \forall i \Rightarrow T(0) = 0$
 additiv: $c_i = 1 \forall i \Rightarrow T(\sum x_i(t)) = \sum y_i(t)$
 durch Verschiebung: $c_i = 0 \Rightarrow T(0) = 0$)

(iii) Zeitinvariant: $y(t) = T(x(t)) \rightarrow T(x(t-\tau)) = y(t-\tau) \forall t, x(t), \tau$

(iv) kausal: $y(t)$ hängt nicht von $x(\tau), \tau > t$, ab $\rightarrow h(t, a(t)) = 0 \forall t < 0$
 (antikausal) (nur)

(v) BIBO-stabil: $|x(t)| \leq M_x < \infty \rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty \forall t, x(t)$

LTI-Systeme

Impulsantwort: $h(t) = T(\delta(t))$

Auswertung: $h(t) = \frac{d}{dt} a(t)$ bzw. $a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$

Springantwort: $a(t) = T(u(t))$

Faltung: Def.: $(x * h)(t) = \int_{-\mathbb{R}} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

Eig.: (i) $x * h = h * x$

(ii) $(x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2) \Rightarrow$ Kettenhaltung

(iii) $(x * h_1) + (x * h_2) = x * (h_1 + h_2) \Rightarrow$ Parallelschaltung



Stabilität: Kriterium: $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt = M_h < \infty$ $\xrightarrow[\text{notwendig}]{\text{hinreichend}}$ BIBO-stabil

Lineare, zeitinvariante

Dgl mit konst. Koeff.: allg.: $\alpha(D) \cdot y(t) = \beta(D) \cdot x(t)$ mit $\alpha(D) = \sum_{i=0}^N a_i D^{n-i}$ mit $D^n x(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$

Eig.: - konstante Koeff. \rightarrow zeitinvariant

- und der Dgl: $N(\mathbb{R}^N \text{ Energiespeicher})$

$\{ \alpha(D) y(t) = \beta(D) x(t) \} \subset \{ \tau(t) \}$

$x(t) = 0 \Rightarrow \alpha(D) y(t) = 0$ homogene Dgl

α, β d. B.: $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$

$x(t) \neq 0 \Rightarrow \alpha(D) y(t) = \beta(D) x(t)$ inhomogene Dgl.

Analyse von Signalen im Frequenzbereich

Elementare Signale: Zerlegung von $x(t)$ in $e^{j\omega t}$: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$

$\hookrightarrow T(x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) T(e^{j\omega t}) \frac{d\omega}{2\pi}$
 $\underbrace{\quad}_{H(j\omega) e^{j\omega t}}_{Y(j\omega)}$

Fouriertransformation: Def.: $F(x)(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$... Fourier-Transformierte von $x(t)$ mit $\omega = 2\pi f$... Kreisfrequ.

Ex.-Bed.: $\int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt < \infty$

Inverse: $x(t) = F^{-1}(X(j\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$ (Ex.: zusätzlich Dirichlet-Bedingungen: $x(t)$ hat in jedem endl. Zeitintervall eine endl. Anzahl von Extrema & Unstetigkeitsstellen)

Eig.: (i) $x(-t) \rightarrow X^*(-j\omega)$

(ii) $x^*(t) \rightarrow X^*(j\omega)$

(iii) $X(j\omega) \rightarrow 2\pi x(-\omega)$

(iv) $F(\sum c_i x_i(t)) = \sum c_i F(x_i(t))$

(v) $x(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

(vi) $e^{j\omega t_0} x(t) \rightarrow X(j(\omega-\omega_0))$

(vii) $x(at) \rightarrow X(j\frac{\omega}{a}) \cdot \frac{1}{|a|}$

(viii) $\frac{1}{|a|} x(\frac{t}{a}) \rightarrow X(ja\omega)$

(iii) gerade & reell \rightarrow gerade und reell (iv) ungerade & reell \rightarrow u. + i

(iv) gerade & img. \rightarrow gerade und img. (vi) u. + i \Rightarrow u. + i

$g \rightarrow g \quad i \rightarrow -i$

Jedes Signal in 4 Teile zerlegen:

$x(t) = x_{gr}(t) + j x_{gr}(t) + x_{ur}(t) + j x_{ur}(t)$

\downarrow
 $X(j\omega) = X_{gr}(j\omega) + j X_{gr}(j\omega) + X_{ur}(j\omega) + j X_{ur}(j\omega)$

- $\frac{\partial^n}{\partial t^n} x(t) \rightarrow (j\omega)^n X(j\omega) \triangleq \text{Hohypot}$
- $(-j)^n x(t) \rightarrow \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} X(j\omega)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) ; x(0) = 0$
- $x_1 * x_2 \rightarrow X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) ; 2\pi x_1(t) \cdot x_2(t) \rightarrow X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) \cdot X_2^*(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$
- $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt ; x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$

Zeitdauer & Bandbreite:

Def.: (i) über Fläche:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{x(0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \frac{X(0)}{X(0)} \\ B &= \frac{2\pi}{X(0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{X(0)} \cdot X(0) \end{aligned} \right\} B \cdot T = 2\pi$$

Merkmal: nur für $x(t) \geq 0, X(j\omega) \geq 0$ sinnvoll

(ii) über 2. Moment:

$$\left. \begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}} = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \\ B &= \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Unschärferelation d. FT:} \\ &B \cdot T \geq \frac{1}{2} \\ &\text{Fall "": } x(t) \text{ ist eine Gauss-Fkt (und somit auch } X(j\omega)) \end{aligned}$$

Analyse von LTI-Systemen in Frequenzbereich:

Frequenzgang:

$$LTI \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{ex. falls } h(t) \text{ BIBO-stabil}) \quad \text{-- Frequenzgang}$$

(i) $x(t) = e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} \Big|_{x(t)=e^{j\omega t}} \rightarrow \begin{aligned} &\text{sin bleibt sin} \\ &\text{kein neuer Frequenz} \end{aligned}$

(ii) $x(t)$ T-period. $\rightarrow x(t) = \sum_n c_n e^{jn\Omega t} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\hookrightarrow y(t) = \sum_n c_n T(e^{jn\Omega t}) = \sum_n c_n \underbrace{H(jn\Omega)}_{Y_n} e^{jn\Omega t} = y(t+T) ?$$

(iii) $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

Phasen- u. Gruppenlaufzeit:

(falls $h(t) = h^*(t) \rightarrow H(j\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$
 ↳ Amplitudengang

$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$ -- Phasenlaufzeit [linearephasige LTI-Systeme: $\phi(\omega) = -(\omega t_0 + \phi_0)$
 ↳ $\tau_p = t_0 = \text{const.} \forall \omega$
 ↳ Konst. Verzögerung]

$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \phi(\omega)$ -- Gruppenlaufzeit

Rationaler

Frequenzgang:

$\{Dgl \Rightarrow \text{rationaler Frequenzgang}\} \subset \{LTI\}$


$x(t) \cdot y(t) = \beta(t) \cdot x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(j\omega) Y(j\omega) = \beta(j\omega) X(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^N + \dots + b_M}{a_0(j\omega)^N + \dots + a_M}$

Hilbert-

Transformator:

• Zur Erzeugung eines analytischen Signals $x_a(t)$ zu $x(t) \in \mathbb{R}$

• analytisches Signal: $X_a(j\omega) = 2X(j\omega) \vee(\omega) \dots$ (Einschließungssignal)
 ($X(j\omega)$ gerade \Rightarrow Einseitigbandsignal)

• $x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow$  $x_a(t) \in \mathbb{R}$ mit $H(j\omega) = -j \text{sign}(\omega) \left[\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{\pi t} \cdot \phi(t) \right]$

Entwurf analoger

Filter:

Abtasttheorem:

ideale

reale Abtastung: $\tilde{x}(t) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t-nT) \rightarrow g(t): \text{Abtastimpuls}$

ideale Abtastung: $\tilde{x}(t) = T \sum_n x(nT) \delta(t-nT) = x(t) \cdot \underbrace{\sum_n \delta(t-nT)}_{\sum_k \delta_k e^{jk\Omega t}}$

$\hookrightarrow \tilde{X}(j\omega) = \sum_k X(j(\omega - k\Omega))$

Abtasttheorem:

• $x(t)$ bandbegrenzt, d.h. $|X(j\omega)| = 0 \quad \forall \omega > \omega_g$
 $\Omega > 2\omega_g \rightarrow$ keine Überlappung von $X(j\omega - k\Omega) \rightarrow$ kein Aliasing
 $X(j\omega) = \tilde{X}(j\omega) \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$

Abtasttheorem: $x(t)$ sei bandbegrenzt $\Leftrightarrow |X(j\omega)| = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_y$
 $\Omega > 2\omega_y \rightarrow$ keine Überlappung von $X(j\omega - jk\Omega)$
 \rightarrow kein Informationsverlust

Rekonstruktion: $X(j\omega) = \hat{X}(j\omega) \text{rect}\left(\frac{\omega}{B/2}\right) = T \cdot \sum x(nT)$
 \uparrow
 $x(t) = T \frac{\Omega}{2\pi} \sum_n x(nT) \text{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}(t - nT)\right)$

(nicht realisierbar \rightarrow Approximation)

* Für jede Abtastung: TP-Faltung von $x(t)$ (Anti-aliasing-Filter)

Analyse von ~~LT~~ Systemen
in der komplexen Ebene:

Elementare Signale: Zerlegung von $x(t)$ in e^{pt} , $p \in \mathbb{C}$: $x(t) = \int X(p) e^{pt} dp$

Zweiseitige Laplace-Transf.: Def.: $p = \sigma + j\omega$

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Konvergenz-Bereich (KB): $\{p : |X(p)| < \infty\}$

Zusammenhang zur Fourier-Transf.: $X(j\omega) = X(p)|_{p=j\omega}$, wenn $\forall \omega$ $j\omega$ -Achse \in KB

inverse: $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p) e^{pt} dp$

Einseitige Laplace-Transf.: $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$
 (wenn $x(t)$ nur bekannt für $t \geq 0$)

$X^+(p) = \mathcal{L}^+(x(t)) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$ [Vereinbarung:
 $\int_0^{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T$]

KB: $\{p \in \mathbb{C} : \text{Re}\{p\} > \sigma\}$

$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^+$: * wenn $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$: $X(p) = X^+(p)$

* wenn $x(t) \neq 0 \quad \forall t < 0$: $\mathcal{L}^+(x(t)) = \mathcal{L}(x(t))$, aber $\mathcal{L}^+(x(t)) = \mathcal{L}(x(t)) \cdot u(t)$

* KB von $X^+(p)$: rechtsseitig

$X(p)$: rechts-/linksseitig, vertikale Strichlinie

inverse: $x(t) \cdot u(t) = \mathcal{L}^{-1}(X^+(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X^+(p) e^{pt} dt$

Eigenschaften:

	\mathcal{L}	\mathcal{L}^+
$\frac{\partial^n}{\partial t^n} x(t)$	$p^n X(p)$	$p^n X^+(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} x^{(i)}(0)$

Analyse von LTI-Systemen
in der komplexen Ebene

Übertragungsfkt.: $H(p) = \mathcal{L}(h(t)) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ ($x(t)$ kanal, $h(t)$ kanal $\rightarrow y(t)$ kanal)
 $\hookrightarrow H(p) = H^*(p)$, $H(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$

Reihen-Parallel-Schaltung von Systemen:

- (i) Parallel: (1) Wenn alle T_i gedächtnislos/linear/zeitinvariant/kanal/stabil, dann auch T (Umkehrung gilt nicht!)

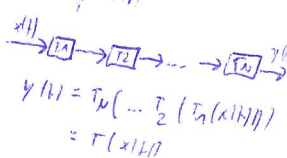


$y = \sum T_i(x(t)) = T(x(t))$

- (2) Wenn alle $T_i \in \mathcal{LTI}$ mit $H_i(p) = \mathcal{L}(h_i(t))$, dann gilt $h(t) = \sum h_i(t)$ bzw. $H(p) = \sum H_i(p)$

(ii) Serie: (1) wie bei parallel

- (2) $h(t) = (h_1 * h_2 * \dots * h_n)(t)$
 bzw. $H(p) = \prod H_i(p)$



$y(t) = T_n(\dots T_2(T_1(x(t)))) = T(x(t))$

Rationale Ü-Fkt.: $\mathcal{LTI}: \alpha(D) y(t) = \beta(D) x(t)$

(1) $x(t), y(t)$ bekannt $\forall -\infty < t < \infty$, kein Anfangswert

$\hookrightarrow \mathcal{L}(\cdot): \mathcal{L}(\alpha(D) y(t)) = \alpha(p) Y(p)$
 $\mathcal{L}(\beta(D) x(t)) = \beta(p) X(p) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \mathcal{L}(\alpha(D) y(t)) \\ \mathcal{L}(\beta(D) x(t)) \end{matrix}} \right\} H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} \quad \begin{matrix} \text{(Gnd. 1)} \\ \text{(Gnd. 2)} \end{matrix}$

(2) $x(t), y(t)$ bekannt $\forall t \geq 0$, Anfangswerte $x(0), \dots, x^{(n-1)}(0), y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$

$\hookrightarrow \mathcal{L}^+(\cdot): \mathcal{L}^+(\alpha(D) y(t)) = \dots$

$$\mathcal{L}^+(\alpha(t)y(t)) = a_0 \left[p^n y^+(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} y^{(i)}(0) \right] + a_1 \left[p^{n-1} y^+(p) - \sum_{i=0}^{n-2} p^{n-2-i} y^{(i)}(0) \right] + \dots + a_n y^+(p) = \alpha(p) \cdot y^+(p) - \underbrace{y^-(p)}_{\text{Grenzwert } \leq n-1}$$

$$\Rightarrow y^-(p) = \underbrace{\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}}_{\substack{H(p) \\ \text{rational}}} x^+(p) + \underbrace{\frac{\gamma(p) - \sigma(p)}{\alpha(p)}}_{\text{rational}}$$

Pole und Nullstellen: Pole p_i , Nst. η_i : $H(p_i) = \infty$, $H(\eta_i) = 0$

Wichtig: $p_i \notin \mathbb{R}_B$

Sei $H(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} = \frac{b_n}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (p - \eta_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$ → Pol-Nullstellen-Diagramm

$H(p)$ bis auf globale Skalierung $K = \frac{b_n}{a_n}$ vollständig beschrieben

Stabilität: System BIBO-stabil: $j\omega$ -Achse $\in \mathbb{R}_B$

$\text{Re}\{p_i\} < 0 \forall i$ für kausale Systeme
causal

Minimumphasig

System & Allpass: $H(p)$ kausal, stabil $\Rightarrow \text{Re}\{p_i\} < 0 \forall i$:

System minimumphasig: $\text{Re}\{\eta_i\} < 0 \forall i$: inverses System (H^{-1} stabil)

maximumphasig: $\text{Re}\{\eta_i\} > 0 \forall i$: nicht invertierbar (Allpass)

gemischte Phase: sonst

Allpass: $A(\omega) = |H(j\omega)| = \text{const. } \forall \omega$ (Phasendetektor)

* $H(p) = H_{\min}(p) \cdot H_{\text{AP}}(p)$

* Bei n verschiedenen Nst. ($\notin j\omega$ -Achse) gibt es 2^n äquiv. (A)W gleiches LTI-System, davon n min-, n max-phasig, Rest gemischt

Inverse Laplace-Transform: (i) Partialbruchzerlegung: Sei $x(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$

a) $\frac{\beta'(p)}{\alpha(p)} = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{p - p_i} \rightarrow c_i = \frac{\beta'(p)}{\alpha(p)} (p - p_i) \Big|_{p=p_i}$

b) $\frac{\beta'(p)}{(p - p_i)^{m_i}} \rightarrow i! \cdot c_{m_i-i} = \frac{d^i}{dp^i} \left(\frac{\beta'(p)}{\alpha(p)} (p - p_i)^{m_i} \right) \Big|_{p=p_i}$

(ii) Lösen von Dgl: $\alpha(D)y(t) = \beta(D)x(t)$

* stat. Lsg.: $x(t)$ bekannt für $-\infty < t < \infty$

$\hookrightarrow y(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} x(p)$ (rational wenn $x(t)$ rational)

$\hookrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}(y(p))$ mit PBC

* Anfangswertproblem: $x(t)$ bekannt für $t \geq 0$

Anfangswerte: $y^{(i)}(0)$ $0 \leq i \leq n-1$, $x^{(i)}(0)$ $0 \leq i \leq m-1$

$\hookrightarrow y^+(p) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} \cdot x^+(p) + \frac{\sigma(p) \cdot y^-(p)}{\alpha(p)}$

$\hookrightarrow y(t) \cup(t) = \mathcal{L}^{-1}(y^+(p))$ falls $x^+(p)$ rational ist

(iii) Faltung: $y(t) = (h * x)(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p) \cdot X(p))$

Analyse von Systemen im Zustandsraum:

Systeme mit mehreren Ein- & Ausgängen

Vektorschreibweise: $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{pmatrix}$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix}$: $x(t) \xrightarrow{T} y(t) = T(x(t))$; r, q Verbindungen vom Ein- zum Ausgang

Matrix d. Impulsantworten: $h(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & \dots & h_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{q1}(t) & \dots & h_{qr}(t) \end{pmatrix} = [h_1(t) \dots h_r(t)] \rightarrow h_j(t) = T(S(t) \cdot e_j)$

$x_j(t) \xrightarrow{h_j} y_i(t)$

$\forall x(t)$ gilt: $x(t) = \int x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \Rightarrow y(t) = \int h(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau =: h_2 x$

$y_i(t) = (h_{i1} * x_1 + \dots + h_{ir} * x_r)(t)$

$\underline{Y}(p) = \mathcal{L}(y(t)) = \begin{bmatrix} y_1(p) \\ \vdots \\ y_q(p) \end{bmatrix} = \underline{H}(p) \cdot \underline{X}(p) \rightarrow \underline{H}(p) = \mathcal{L}(\underline{h}(t))$

Analyse von LTI-Systemen im Zustandsraum:

Zustandsvariablen u. Zustandsraum:



- Zustandsvektor: $\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$ $n \times 1$ Vektor; n Anzahl d. Spalten
... charakterisiert Systemzustand
 $z_i(t)$... Zustandsvariablen

- Punkt in Zustandsraum $\hat{=}$ Zustand zum Zeitpunkt t
- Trajektorie: $\underline{z}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_2$

- Ex. für Systeme mit konzentrierten Elementen \rightarrow gewöhnliche Dgl \rightarrow rationale G-Fkt
- $\underline{z}(t)$ nicht eindeutig ($\neq 1$)

Zustands- und Ausgangsgleichung:

Zustandsgleichung: $\underline{z}'(t) = \frac{d\underline{z}(t)}{dt} = \underline{A} \cdot \underline{z}(t) + \underline{B} \cdot x(t)$ \underline{A} $n \times n$, \underline{B} $n \times 1$, $x(t)$ 1×1

Ausgangsgleichung: $y(t) = \underline{C} \cdot \underline{z}(t) + \underline{D} \cdot x(t)$ \underline{C} $1 \times n$, \underline{D} 1×1 mit $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ Systemmatrix

- Eigenschaften: lineares System
 $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ konstant \rightarrow zeitinvariant

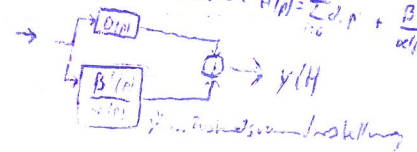
$\underline{z}(t) ; t \geq t_0 ; \underline{z}(t_0) \Rightarrow \underline{z}(t) ; t \geq t_0$
 $\Rightarrow y(t) ; t \geq t_0$

Umwandlung Dgl \leftrightarrow Zustandsraum:

geg.: $x'(t) = \underline{A}(t)x(t) + \underline{B}(t)u(t)$

o. b.d.A.: $\underline{A} \neq 0$ bzw. $\underline{A} = 1$

$M = N - 1$ (wenn $M < N - 1 : b_0, b_{M+1} = 0$
 $M > N - 1 : \text{Polynomdivision: } H(p) = \sum_{i=0}^{M-N} d_i p^i + \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$



Steuerungsnormalform:

$y(p) = \beta(p) \cdot \frac{x(p)}{\alpha(p)} \hat{=} \frac{1}{\alpha(p)} \cdot \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} \cdot x(p) \rightarrow y(t)$

$\hookrightarrow \alpha(p) \cdot y(p) = \beta(p) \cdot x(p) \Leftrightarrow \ddot{y}^{(n)}(t) + a_{n-1} \dot{y}^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = x(t)$

$\hookrightarrow y(p) = \beta(p) \cdot v(p) \Leftrightarrow \dot{v}(t) = b_0 v^{(n)}(t) + \dots + b_{n-1} v(t)$
... Zustandsgleichung
... Ausgangsgleichung

Zustandsvariablen: $z_1(t) = v(t)$
 $z_2(t) = v'(t)$
 \vdots
 $z_n(t) = v^{(n-1)}(t)$
 $\rightarrow \begin{matrix} z_1'(t) = v'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = v''(t) = z_3(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}'(t) = v^{(n-1)}(t) = z_n(t) \\ z_n'(t) = v^{(n)}(t) = -a_0 z_1(t) - \dots - a_{n-1} z_n(t) \end{matrix}$

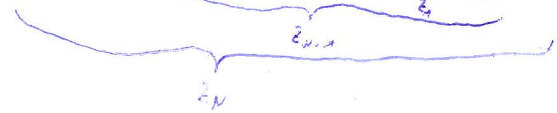
$\hookrightarrow \underline{z}'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{z}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{B}} x(t)$

$y(t) = b_{n-1} z_1(t) + \dots + b_0 z_n(t) = \underbrace{[b_{n-1} \dots b_0]}_{\underline{C}} \underline{z}(t) + \underbrace{0}_{\underline{D}} x(t)$

Beobachtungsnormalform:

$\alpha(p) \cdot y(p) = \beta(p) \cdot x(p) \Leftrightarrow p^n y + p^{n-1} a_1 y + \dots + p a_{n-1} y + a_0 y = p^{n-1} b_1 x + \dots + b_0 x$

$\Rightarrow y(p) = \frac{1}{p} \left\{ b_0 x - a_0 y \right\} + \frac{1}{p} \left\{ b_1 x - a_1 y \right\} + \dots + \frac{1}{p} \left\{ b_{n-1} x - a_{n-1} y \right\}$



$$\Rightarrow Y(p) = Z_N(p)$$

$$\cancel{b_{N-1} \cdot X(p) - a_N Y(p)}$$

$$\begin{cases} p \cdot Z_1(p) = b_{N-1} \cdot X(p) - a_N Y(p) \\ p \cdot Z_i(p) = b_{N-i} \cdot X(p) - a_{N-i+1} Y(p) + Z_{i-1}(p) \quad (2 \leq i \leq N) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Z_1'(t) &= b_{N-1} \cdot x(t) - a_N z_N(t) \\ Z_i'(t) &= b_{N-i} \cdot x(t) - a_{N-i+1} z_N(t) + z_{i-1}(t) \quad (2 \leq i \leq N) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{z}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_N \\ & \ddots & & -a_{N-1} \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \underline{z}(t) + \begin{bmatrix} b_{N-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} x(t)$$

Lineare Transformation d. Zustandsraums

geg.: $\begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases} \Leftrightarrow x \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix} \rightarrow y$

Lineare Trafo: $\begin{aligned} \underline{\tilde{z}} &= \underline{V}^{-1} \underline{z} \\ \underline{z} &= \underline{V} \underline{\tilde{z}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\tilde{z}}' = \tilde{A} \underline{\tilde{z}} + \tilde{B} u \\ \underline{y} = \tilde{C} \underline{\tilde{z}} + \tilde{D} u \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} \tilde{A} &= \underline{V}^{-1} \underline{A} \underline{V} \\ \tilde{B} &= \underline{V}^{-1} \underline{B} \\ \tilde{C} &= \underline{C} \underline{V} \\ \tilde{D} &= \underline{D} \end{aligned}$

* gleiche Übertragungseigenschaften
* es gibt unendlich viele \underline{V}

Eigenwertzerlegung:

(i) Diagonalisierung
(λ_i einfach
 $\rightarrow v_1, \dots, v_N$ linear unabh.)

$$\Rightarrow \underline{V} = [v_1 \dots v_N]$$

(ii) Jordan-Form: $\lambda_1 (1 \leq i \leq m); \nu_i$ -fach; $\sum \nu_i = N \Rightarrow J = \lambda \cdot \underline{I} + N$

* Charakterist. Polynom von $A = \det(A - \lambda D) \hat{=} \det H(\lambda)$
* Berechnung d. Pol. von A über Berechnung d. Eigenwerte

*) $\underline{V}^{-1} \underline{A} \underline{V} = \underline{J} \Rightarrow$ alle \tilde{z}_i entkoppelt
 $\rightarrow N$ " "

$= \underline{J} \rightarrow$ viele \tilde{z}_i entkoppelt
 \rightarrow weniger " ", " "

*) Wie Steuerform und λ_i einfach: $\underline{V}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 \\ \lambda_1^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}; \underline{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \dots & \lambda_N^0 \\ \lambda_1^1 & \dots & \lambda_N^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_N^{n-1} \end{bmatrix}$ (Kontrollmatrix)

Lösen v. Zustandsgleichung:

geg.: $\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{B} u(t) \\ y(t) = \underline{C} \underline{z}(t) + \underline{D} u(t) \end{cases}$

ges.: $\underline{z}(t), y(t), -\infty < t < \infty$
bzw. $\underline{z}(t), y(t), t \geq 0$

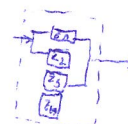
\Rightarrow Berechnung d. Übergangsmatrix: $\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t}$

* Diagonalisierung von $\underline{A} \rightarrow \underline{\Phi}(t) = \underline{V} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \underline{V}^{-1}$

* Inverse Laplace-Trafo: $\underline{\Phi}(t) \cdot u(t) \xrightarrow{L} (p \underline{I} - \underline{A})^{-1}$
 \Rightarrow Berechne $(p \underline{I} - \underline{A})^{-1}$
 \Rightarrow Inverse Laplace-Trafo auf alle Elemente

Eigenschaften/Rechenregel für $\underline{\Phi}(t)$:

$$\begin{aligned} 1) \underline{\Phi}(0) &= \underline{I} \\ 2) \underline{\Phi}'(t) &= \underline{A} \underline{\Phi}(t) \\ 3) (\underline{\Phi}(t))^k &= \underline{\Phi}(k \cdot t) \\ 4) \underline{\Phi}(t_1) \cdot \underline{\Phi}(t_2) &= \underline{\Phi}(t_1 + t_2) \end{aligned}$$



Stauben	Rechenweise
\tilde{z}_1	\checkmark
\tilde{z}_2	\checkmark
\tilde{z}_3	\checkmark
\tilde{z}_4	\checkmark

System-Ordnung $\hat{=}$ Ordnung von $H(p)$
 $\hat{=}$ # unabh. relevanter Eingangsgrößen
 $=$ Länge von \underline{z}

Steuerbarkeit & Beobachtbarkeit:

System heißt steuerbar, wenn es V_{st} zu $x(t)$ gibt, das $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$
Notwend. Bed.: $\underline{V}_s = [\underline{B} \quad \underline{A} \underline{B} \quad \dots \quad \underline{A}^{N-1} \underline{B}]$ hat Rang N
 $\underline{x}(t_1) = \underline{\Phi}(t_1 - t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \underline{\Phi}(t_1 - \tau) \underline{B} u(\tau) d\tau$
 $\Rightarrow \underline{\Phi}(t_1) \underline{B} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!} (\underline{A} t_1)^i \underline{B}$

~~for~~
* bekannt für: $-\infty < t < \infty: \underline{H}(p) = \underline{C}(p \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}$
mit $(p \underline{I} - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{\det} \text{adj}$
mit $\text{adj}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$
 $t > 0: y'(t) = \underline{H}(p) \cdot x'(t) + \underline{C}(p \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} u(t)$
im Zeitbereich: $\underline{z}(t) = \underline{\Phi}(t) \underline{z}_0 + \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{B} u(\tau) d\tau$
 $y(t) = \underline{C} \underline{\Phi}(t) \underline{z}_0 + \int_0^t \underline{C} \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{B} u(\tau) d\tau + \underline{D} u(t)$

Steuerbarkeit & Beobachtbarkeit: \underline{z} zerlegt in 4 Teile:

Ein LTI-System mit $x(t) \mapsto y(t) = f(t) \cdot x(t)$ mit Steuereingangsform ist immer steuerbar
 Ein lineares Trafo verändert Steuerbarkeit nicht

Beobachtbarkeit: System heißt beobachtbar, wenn aus $x(t)$ und $y(t)$ der Anfangszustand z_0 eindeutig bestimmt werden kann
 Matr. Bed: $U_y = [C A^0 \dots C A^{n-1}]^T$ hat vollen Rang

$$\hookrightarrow f(t) = \underline{C} \underline{\Phi}(t-t_0) \underline{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{h}(t-\tau) \underline{x}(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad \underline{C} \underline{\Phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{C} A^k (A t_0)^k$$

Beobachtbarkeitsnormalform immer beobachtbar
 lineare Trafo ...

Steuerung d. Zustandsraum

Steuerbarkeit: $U_u = [\underline{A}^0 \underline{B} \dots \underline{A}^{n-1} \underline{B}]$

Kontrollierbarkeit Rang $(U_u) = n$

oder $n_1 < n \Rightarrow \exists \tilde{V} : \tilde{z} = \tilde{V}^{-1} \underline{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix}$ n_1 steuerbar
 $n-n_1$ nicht zu

Beobachtbarkeit:

oder Behaltene Teilsystem: $\tilde{z}_1(\tilde{z}_2=0)$ und $\tilde{z}_2(\tilde{z}_1=0)$: $\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix} u$
 $\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix}$

Analyse von allg. Systemen

Mehrfach-Systeme:

MD-Dirac-Plot: $\delta(t) \otimes \int \dots \int \delta(t) d\tau = 1$; $\int \dots \int \delta(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \delta(t)$

MD-LTI-System: Impulsantwort: $h(t) = \mathcal{T}(\delta(t))$
 $\hookrightarrow y(t) = (h * x)(t)$

MD-Laplace-Transform: $x(p) = \int \dots \int x(t) e^{-(p_1 t_1 + \dots + p_n t_n)} dt_1 \dots dt_n$

oder $\frac{\partial}{\partial t_i} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p_i x(p)$

oder $(h * x)(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(p) x(p)$

MD-Ü-Plot: $H(p) = \mathcal{L}(h(t)) = \frac{y(p)}{x(p)}$

MD-Frequenz-Gang: $H(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$

Separationssignal: $x(t) = x_1(t_1) \dots x_n(t_n)$
 System: $h(t) = h_1(t_1) \dots h_n(t_n)$
 $\hookrightarrow MD \rightarrow M \times 1 D$

Lineare, zeitvariable Systeme:

$T(x(t-\tau)) \neq y(t-\tau)$

zeitvariable Impulsantwort: $\{h(t, \tau) : h(t, \tau) = T(\delta(t-\tau))\}$
 Beispiel: Wirkung

Polynom 2: $h(t-\tau, \tau) = T(\delta(t-\tau))$

$\hookrightarrow y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau, \tau) d\tau \neq h * x$

Beschreibung im Frequenz-Bereich: $H(j\omega, \tau) = \int h(t', \tau) e^{j\omega t'} dt'$... zeitvariable Frequenz-Gang

$\hookrightarrow Y(p) = \int H(p, \tau) X(\tau) e^{p\tau} d\tau$

in Zustandsraum: $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D} \rightarrow \underline{A}(t), \underline{B}(t), \dots$

Wenn $x(t), t \geq t_0$ und $z(t_0)$ bekannt:

$$\underline{z}(t) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{z}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \tau) \underline{B}(\tau) x(\tau) d\tau$$

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \underline{A}(\tau) d\tau}$$